

CONVEX MESH GENERATION BY A METHOD OF INCREMENTAL QUADRANGULATION

**Rafael Siqueira Telles Vieira^a, Joaquim Bento Cavalcante-Neto^a, Creto Augusto Vidal^a,
Luiz Fernando Martha^b e Marcelo Gattass^b**

^a*CRAB, Computer Graphics, Virtual Reality and Animation Group, Computing Department, Federal University of Ceará, Campus do Pici, Av.Humberto Monte, s/n, 60440-554, Fortaleza, CE, Brazil, crab.dc.ufc.br*

^b*Tecgraf, Computer Graphics Technology Group, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, www.tecgraf.puc-rio.br*

Palavras Chave: Quadrangulation, Mesh Generation, Convex.

Resumo. This article presents a method for incremental quadrangulation based on a new concept of n-connected quadrangle. The proposed method ensures convexity and good quality to the elements. The incremental quadrangulation is based on the partitioning of any polygonal region without restrictions into a set of n-connected quadrangles. N-connected quadrangles are on their turn a subset of vertices and edges that are linked incrementally with the mesh. The introduction of the n-connected elements also aims at deepening the study of quadrangles and their properties, since other techniques can be analyzed from the perspective of their definitions.

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo é apresentado uma técnica para geração de malhas quadrilaterais convexas no espaço bidimensional chamada de quadrilaterização incremental. Nesta seção são apresentados a motivação, os objetivos e os artigos relacionados a este trabalho. Na Seção 2, os conceitos necessários são expostos para compreensão do algoritmo, na Seção 3, o algoritmo é apresentado, e, na Seção 4, os resultados obtidos são discutidos. Na última seção é feita a conclusão e uma breve discussão sobre trabalhos futuros.

1.1 Motivação

A quadrilaterização convexa de qualidade em 2D ainda é um assunto pouco explorado devido a sua complexidade, e encontrar uma quadrilaterização convexa mínima é um problema NP-difícil se buracos são permitidos (O'Rourke, 1983; Lubiw, 1985). As técnicas de quadrilaterização existentes normalmente exigem uma triangulação, mas nem toda triangulação garante uma quadrilaterização posterior. São poucos os métodos que asseguram uma quadrilaterização convexa, isto é, sem elementos côncavos, dentre os métodos que produzem uma quadrilaterização de forma direta, sem uma triangulação.

1.2 Objetivos

Este trabalho propõe uma técnica de tesselação do espaço bidimensional, a qual é analisada segundo critérios de topologia e geometria. Essa técnica deve produzir elementos exclusivamente quadrilaterais e convexos adequando-se a um critério de qualidade de forma a gerar uma boa malha sem o uso de triangulação anterior. Isso, em geral, atende a todas as áreas que necessitam de técnicas de geração de quadriláteros, indo desde a área de Computação Gráfica até as Engenharias, onde o que se deseja primordialmente são elementos tão próximos do regular quanto possível.

1.3 Trabalhos relacionados

Um dos primeiros passos importantes na busca de uma técnica de quadrilaterização convexa eficiente, é o teorema de Kahn et al. (1983) o qual determina que pelo menos $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas são sempre suficientes e algumas vezes necessários para guardar um polígono com n vértices, cujos lados adjacentes sempre formam ângulos retos. Um corolário importante foi obtido a partir desse teorema que é o fato de que todo polígono ortogonal possui um número par de vértices, pois, conforme foi provado posteriormente por Bose e Toussaint (1995), um polígono só admite uma quadrilaterização, seja ela convexa ou não, se possuir um número par de vértices. Outro resultado importante a ser mencionado é que se um polígono ortogonal possuir buracos, não é necessariamente verdade que exista uma quadrilaterização convexa. Segundo Lubiw (1985), determinar a possibilidade de construir essa quadrilaterização convexa é um problema NP-Completo.

Uma das primeiras tentativas de algoritmos foi construir quadrilaterizações a partir de triangulações, já que uma triangulação sempre existe para polígonos sem buracos (Corrêa e Ferreira, 2009). De fato, a maioria dos métodos desenvolvidos por pesquisadores usa métodos indiretos, partindo de uma triangulação existente, para tentar gerar uma malha de quadriláteros. Conforme Mark de Berg demonstrou em 1992, segundo Everett et al. (1992), com a adição de $O(n)$ pontos de Steiner (Bremner et al., 2001) é possível quadrilaterizar convexamente qualquer triangulação. Ramaswami et al. (1983) já estudou mais a fundo como converter triangulações em quadrilaterizações entre outros.

Os algoritmos de construção de malhas de quadriláteros de boa qualidade são mais complexos que os de geração de triângulos, como foi observado por [Joe \(1995\)](#). [Lai \(1996\)](#) e [Lai e Schumaker \(1997\)](#) demonstraram que existem vantagens geométricas que só podem ser obtidas ao se começar com uma quadrilaterização e não com uma triangulação. Outras vantagens de se usar uma malha de quadriláteros por método direto, sem uma triangulação prévia, já foram bastante discutidas nos artigos de [Bose e Toussaint \(1995\)](#), [Randrianarivony \(2008\)](#) e [Atalay e Ramaswami \(2008\)](#). Isso serve como estímulo para o desenvolvimento de métodos diretos para geração de uma malha de quadriláteros convexos.

O algoritmo Paving, desenvolvido por [Blacker e Stephenson \(1991\)](#), é uma das primeiras técnicas neste sentido, é um dos métodos mais usados para gerar uma malha de quadriláteros. Nesse método, uma fila de quadriláteros é criada na fronteira do polígono, incrementalmente, até ser preenchida toda a região delimitada por ele. Outros trabalhos incluem o método de Buble mesh ([Yamakawa e Shimada, 2002](#)), em que forças físicas nos elementos guiam a quadrilaterização, e o método chamado de Laytracks ([Quadros et al., 2004](#)), que utiliza o eixo médio ([Blum, 1967](#)) como elemento guia para uma quadrilaterização convexa.

As quadrees, originalmente desenvolvidas para visualização volumétrica, podem ser vistas como uma forma de tentar ortogonalizar um polígono qualquer e assim permitir uma quadrilaterização convexa, conforme [Atalay e Ramaswami \(2008\)](#). Essa técnica, por exemplo, tende a gerar bons elementos nas regiões internas do domínio, mas elementos muito ruins nas fronteiras. Trabalhos posteriores como os de [Liang et al. \(2009\)](#) e [Lizier et al. \(2010\)](#) buscam quadrilaterizar um domínio usando templates, isto é, quadrilaterizações convexas pré-definidas de formas conhecidas, para construir quadrilaterizações convexas de polígonos arbitrários. Alguns pesquisadores como [Lai et al. \(2008\)](#) e [Zadravec et al. \(2010\)](#) já estudam a construção de malhas quad-dominant, isto é, malhas em que a maioria de seus elementos são quadriláteros, mas que podem possuir elementos triangulares ou outros polígonos.

Um dos elementos chave para realizar uma quadrilaterização convexa é a adição de pontos de Steiner em um polígono qualquer, e, de fato, para alguns domínios, é impossível realizar uma quadrilaterização convexa sem a adição de pontos de Steiner (Fig. 1).

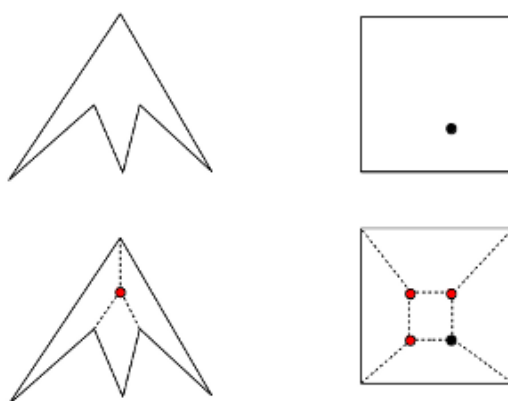


Figura 1: Domínios para os quais não existe quadrilaterização convexa sem a adição de vértices (em vermelho).

A técnica apresentada neste trabalho para geração de malhas quadrilaterais convexas é chamada de quadrilaterização incremental. Ela realiza a inserção de novos vértices através dos quadriláteros n -conexos, um novo conceito introduzido neste artigo que busca construir quadriláteros que atendam a determinadas regras, e usa de templates ou quadriláteros n -conexos especiais para poder quadrilaterizar convexamente alguns domínios.

A técnica de quadrilateralização incremental é baseada no trabalho de [Randrianarivony \(2006, 2008\)](#), que usa decomposição de quadriláteros baseada no teorema de [Meisters \(1975\)](#), o qual determina que todo polígono possui pelo menos dois ângulos convexos (duas orelhas). A técnica também usa o resultado de [Bremner et al. \(2001\)](#) que prova que com a adição de no máximo três vértices de Steiner é possível quadrilateralizar convexamente um hexágono qualquer.

Por fim, é importante esclarecer que nem todas as técnicas de quadrilateralização existentes produzem uma saída convexa, já que muitos algoritmos são baseados em heurísticas. Muitos algoritmos, dentre eles os algoritmos de [Bose e Toussaint \(1995\)](#) e [Wolfenbarger et al. \(1998\)](#) não tratam casos de polígonos com vértices cujas arestas adjacentes formam ângulo de 180° . Por este motivo, seus autores determinam que os elementos retornados por seus algoritmos são estritamente quadrilaterais ou estritamente convexos ([Everett et al., 1992](#)), isto é, que todos os vértices estão em posição genérica (sem possuir três vértices colineares). A técnica de quadrilateralização incremental está preparada para lidar com quadrilateralizações não estritas e convexas de polígonos quaisquer.

2 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

Nesta secção, alguns conceitos necessários à compreensão do algoritmo que é discutido na Seção 3 são apresentados, notadamente o conceito de paridade dos elementos e por fim a definição de quadrilátero n -conexo.

Definição 2.1: Vértice par e vértice ímpar

Um vértice é uma localização no espaço bidimensional real. Um vértice é chamado de par ou ímpar de acordo com a paridade de sua ordem ao ser disposto em um ciclo. O primeiro vértice em um ciclo qualquer é, portanto, ímpar. A paridade de um vértice não necessariamente permanece a mesma ao longo da execução do algoritmo.

Definição 2.2: Ciclo par e ímpar

Um ciclo é uma sequência de segmentos de reta, que define a ordem e o sentido no qual os vértices de um polígono ou os vértices da fronteira de uma malha serão percorridos. Ciclo par é aquele cuja quantidade de vértices é par, e ciclo ímpar é aquele cuja quantidade de vértices é ímpar. Um ciclo par permite quadrilateralização, enquanto um ciclo ímpar não permite quadrilateralização.

Definição 2.3: Diagonal par e diagonal ímpar

Uma diagonal é um segmento de reta que une dois vértices e que corta o espaço interno de um polígono qualquer. Uma diagonal par une dois vértices de paridades diferentes favorecendo o aparecimento de quadriláteros. Uma diagonal ímpar une dois vértices de paridades semelhantes favorecendo o aparecimento de triângulos. Ao adicionar-se uma diagonal a um ciclo par, se esta diagonal for par, formam-se dois ciclos pares, se esta diagonal for ímpar, formam-se dois ciclos de paridades diferentes.

Definição 2.4: Região válida

É o espaço finito e interno a um polígono definido por um vértice v_t de um triângulo e seus vértices vizinhos: anterior e posterior, limitado pelas fronteiras do polígono ou da malha (Fig. 2a). Uma região válida também é o espaço finito e interno a um polígono definido por uma aresta e sua normal aplicada aos vértices extremos (Fig. 2b).

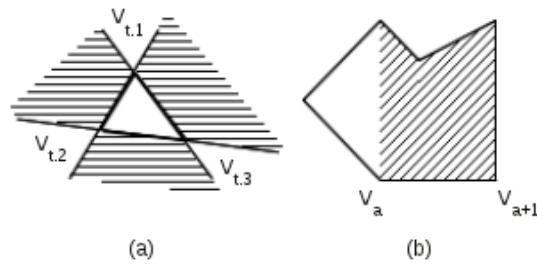


Figura 2: Região válida interna a um polígono qualquer: (a) Um triângulo define uma região hachurada para construção de quadriláteros n -conexos e (b) Uma aresta define uma região hachurada para construção de quadriláteros n -conexos

A região válida também é influenciada pela bissetriz dos ângulos adjacentes ao vértice v_t ou a projeção perpendicular ao segmento oposto a v_t , caso algum dos ângulos seja côncavo (Fig. 3). Quando a região válida termina antes de encontrar a fronteira do polígono ou malha, esta termina em um vértice chamado de ponto final.

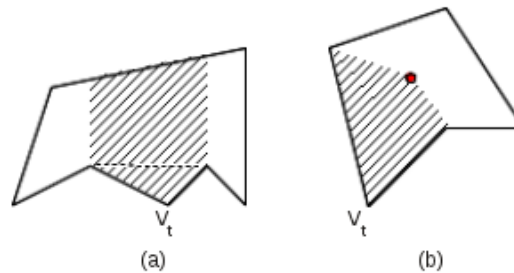


Figura 3: Região válida interna a um polígono qualquer: (a) Influência dos ângulos vizinhos, (b) Ponto final de uma região válida.

Definição 2.5: Vizinhos não-próximos e pseudo-vizinhos

Um vértice vizinho não-próximo é um vértice que se encontra dentro da região válida e que pode causar a intersecção de um quadrilátero n -conexo recém-inserido com a malha já existente ou com o polígono. O vértice pseudo-vizinho é um ponto de intersecção dos segmentos do domínio com a região válida ou o ponto final de uma região válida, caso exista (Fig. 4). Caso um segmento do domínio esteja inserido completamente na região válida, os seus extremos são chamados de vértices não-próximos. Caso um segmento esteja parcialmente inserido na região válida, o ponto de saída da região válida será um vizinho não-próximo juntamente com um de seus extremos.

Definição 2.6: Quadrilátero n -conexo

Um quadrilátero n -conexo ($n = 2, 3, 4$) é um elemento quadrilateral (Fig. 5), formado no interior de um polígono ou de uma malha, com n de seus vértices compartilhado com o polígono ou com a malha. Deste modo se um quadrilátero possui 2 vértices em comum com a malha ou com o polígono, ele é dito 2-conexo (Fig. 5b). Um quadrilátero n -conexo também deve ser formado exclusivamente por diagonais pares para a manutenção de uma quadrilaterização. Um quadrilátero n -conexo que contenha diagonais ímpares será dito degenerado.

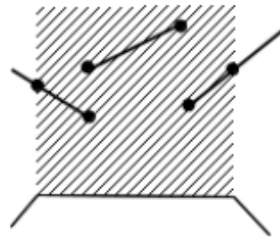


Figura 4: Vertices não-vizinhos e pseudo-vizinhos.

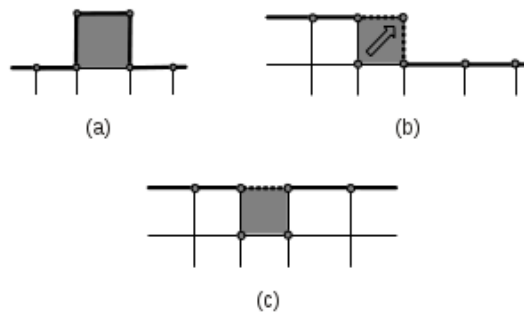


Figura 5: Quadriláteros n -conexos recém-inseridos em uma malha: a) Quadrilátero 2-conexo, b) Quadrilátero 3-conexo e c) Quadrilátero 4-conexo.

3 TEOREMAS

Nesta seção, os teoremas que justificam o algoritmo de quadrilaterização incremental são apresentados sem demonstração.

Teorema 3.1: Existência de uma triangulação

Todo polígono simples admite uma triangulação. Se um polígono tem n lados, então toda triangulação tem $(n-2)$ triângulos e usa $(n-3)$ diagonais.

A prova deste teorema pode ser feita por indução na quantidade de vértices e pode ser verificada em Mark de Berg, segundo [Everett et al. \(1992\)](#).

Teorema 3.2: Limite de vértices

Para quadrilaterizar um polígono qualquer é necessário que ele possua um número par de vértices, ou possua um número par de vértices em sua(s) fronteira(s) durante uma quadrilaterização.

Este teorema pode ser provado graças a [Bose e Toussaint \(1995\)](#), que determina a existência de teorema similar para polígonos convexos. Pode-se garantir que qualquer polígono simples pode ser dividido em regiões convexas pelo Teorema 3.1. Desse modo, se for possível dividir um polígono simples em regiões convexas de ciclo par é possível quadrilaterizar um polígono qualquer (por exemplo, unindo-se regiões triangulares). Caso não seja possível dividir um polígono em regiões convexas pares, é fácil perceber que com a inserção de um vértice em cada um dos lados dos triângulos (regiões convexas mínimas) ciclos pares serão formados, garantindo também a quadrilaterização. De fato, isso já foi demonstrado por Mark De Berg, segundo [Everett et al. \(1992\)](#).

Teorema 3.3: Manutenção de paridade

Pela inserção de quadriláteros n -conexos, é possível manter a paridade dos ciclos de uma quadrilaterização.

Pelo Teorema 3.2, ao realizar uma quadrilaterização qualquer, o algoritmo deve verificar constantemente a paridade dos ciclos existentes. Valendo-se da definição de um quadrilátero n -conexo é possível afirmar que sempre serão inseridas diagonais pares ao polígono sobre o qual a malha será construída.

Por contradição, se quadriláteros degenerados pudessem surgir em meio a uma quadrilaterização incremental, ciclos ímpares seriam formados. Ciclos ímpares não podem ser quadrilaterizados. Se tais ciclos forem convexos, a prova dessa impossibilidade é feita por [Bose e Toussaint \(1995\)](#), se forem côncavos, esses podem ser subdivididos em ciclos convexos pelo Teorema 3.1 e pelo menos um destes ciclos será ímpar. Não há como dividir um ciclo ímpar em somente ciclos pares.

4 LEMAS

São apresentadas algumas consequências imediatas dos teoremas da Seção 3.

Lema 4.1: Inserção de novos vértices

Para possibilitar uma quadrilaterização, pode ser necessário que se incluam novos vértices na fronteira ou no interior de um polígono.

Pelo Teorema 3.2 (teorema do limite de vértices), sabe-se que um ciclo par é necessário para a criação de uma quadrilaterização. No entanto, se o ciclo inicial associado a um polígono for ímpar, é impossível obter uma malha formada apenas por quadriláteros, a não ser que um vértice seja inserido em seu domínio. Exemplos simples desse caso são o triângulo e o pentágono, em que é fácil perceber que, sem a inserção de vértices, é impossível obter uma quadrilaterização de seus domínios.

Contudo, em alguns casos (Fig. 6), mesmo que o ciclo inicial associado ao polígono seja par, pode ser impossível quadrilateralizar o domínio sem a inserção de um ponto interno.

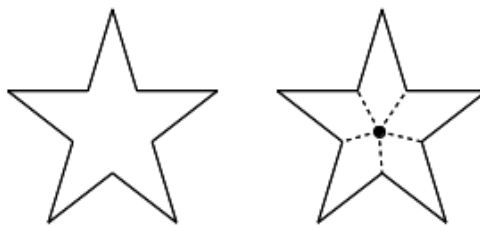


Figura 6: Quadrilaterização convexa de uma estrela com diagonais pares e um vértice de Steiner.

Em casos como o da estrela da Figura 6, a criação de diagonais pares não é possível o que impossibilita a formação de quadriláteros no domínio. Logo, para garantir a quadrilaterização pode ser necessário a inserção de um novo vértice interno ao polígono, que é feita através dos quadriláteros n -conexos.

Lema 4.2: Qualidade da malha

Evitar ciclos ímpares em uma quadrilaterização permite uma boa qualidade da malha.

Esta é uma consequência do Teorema 3.3. Qualidade tal qual definida neste lema, refere-se ao aparecimento de ciclos ímpares o que exige a inserção de novos vértices na malha (ciclos ímpares em seu caso mais trivial são triângulos). Criar ciclos ímpares desnecessariamente acarreta na inserção de vértices supérfluos, resultando na perda da qualidade final da malha (Fig. 7). No mínimo, para cada ciclo ímpar serão inseridos quatro quadriláteros n -conexos, cuja área será um fragmento da região definida pelo ciclo. Em princípio, pode parecer que a inserção de novos vértices aumente a qualidade da malha, mas o aparecimento de ciclos ímpares pode causar o surgimento de elementos pequenos (quadriláteros n -conexos inseridos nessas regiões) ao lado de elementos grandes, resultando em uma deformação na malha. De forma intuitiva, caso uma quadtree estivesse sendo formada, ciclos pares e ímpares gerariam quadrilaterizações de níveis diferentes na árvore.

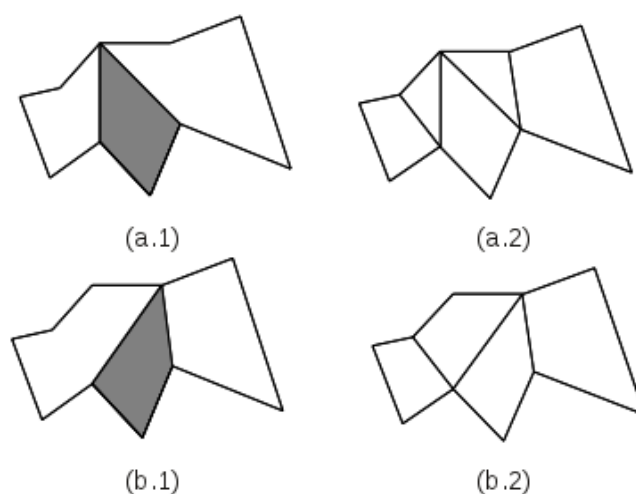


Figura 7: Quadrilaterização convexa de uma estrela com diagonais pares e um vértice de Steiner.

5 QUADRILATERIZAÇÃO INCREMENTAL

Esta seção descreve o funcionamento do algoritmo proposto e seus procedimentos. A Seção 5.1 realiza uma descrição sucinta do algoritmo conforme a Figura 8, e então os processos do algoritmo são detalhados na Seção 5.2.

5.1 Estrutura do algoritmo

No início do algoritmo para construção de uma malha quadrilateral, deve ser definido um critério de qualidade para qualificar os quadriláteros n -conexos. Em seguida, se a paridade do ciclo que constitui o polígono simples for ímpar, um novo vértice é inserido no domínio, e a inserção de quadriláteros tem início. Um quadrilátero 4-conexo, 3-conexo ou 2-conexo é inserido sucessivamente na malha até o final da execução do algoritmo.

Um quadrilátero $(k-1)$ -conexo só é inserido, se não houver mais nenhuma possibilidade de inserção de um quadrilátero k -conexo no momento, e sempre que um quadrilátero n -conexo qualquer é inserido, verifica-se a existência de um quadrilátero 4-conexo no ciclo. Após a inserção de qualquer quadrilátero, verifica-se o critério de parada, pois este assegura o término do algoritmo e insere quadriláteros 4-conexos sempre que for atendido.

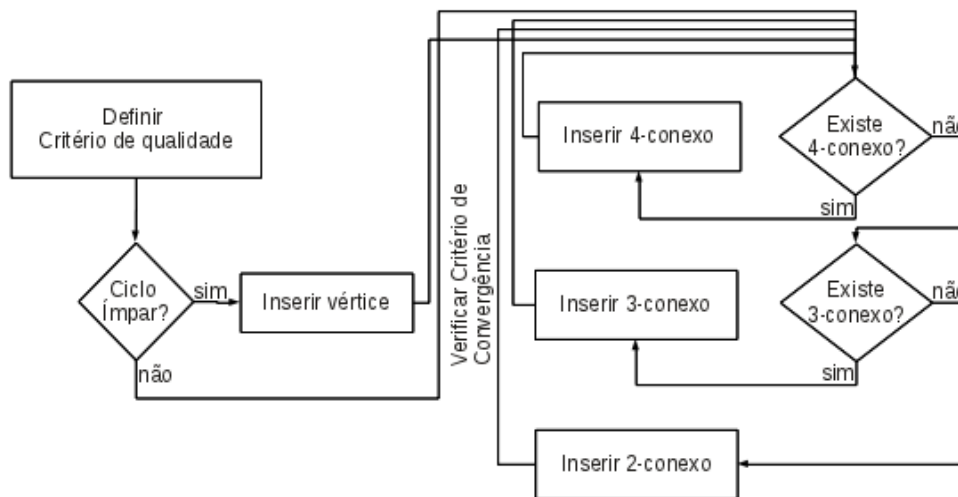


Figura 8: Modelo da linha de execução do algoritmo.

5.2 Processos

Nesta subseção é discutido o funcionamento detalhado de cada processo componente do algoritmo. Nas subseções 5.2.1 à 5.2.3, são discutidos o critério de qualidade, o critério de parada e a criação de ciclos pares. Nas subseções 5.2.4 à 5.2.6, são discutidas as inserções de quadriláteros n -conexos, e por fim, nas subseções de 5.2.7 à 5.2.9, os quadriláteros especiais são apresentados.

5.2.1 Critério de qualidade

O critério de qualidade consiste em encontrar a razão entre a altura e a largura de um *Object Oriented Bounding Box* ou OOBB que envolve um quadrilátero qualquer. Essa *bounding box* é orientada para melhor encaixar o quadrilátero correspondente (Barequet e Har-Peled, 2001). Sempre que um quadrilátero n -conexo convexo atende ao critério de qualidade ele é adicionado à malha.

5.2.2 Critério de parada

Um critério de parada deve ser usado para garantir a finalização da malha, pois o critério de qualidade pode não ser atendido por todos os elementos existentes na malha. Esse critério, quando atingido, permite o uso de quadriláteros especiais e garante a existência de quadriláteros 4-conexos. O critério consiste em encontrar o menor segmento do polígono simples original (ms), e definir a menor área como $(ms)^2$. Qualquer quadrilátero 4-conexo Q cuja área seja menor que $(ms)^2$ é inserido na malha. Para o cálculo da área de Q , utiliza-se a fórmula de Brahmagupta (Weisstein, 2011).

5.2.3 Ciclo ímpar e inserção de vértice

É verificado se existe um ciclo ímpar, se sim, um vértice é inserido na metade do maior segmento pertencente ao ciclo (Fig. 9). Conforme já foi demonstrado por Bose e Toussaint (1995) é necessário a existência de ciclos pares para a existência de uma quadrilaterização.



Figura 9: Quadrilaterização de um pentágono pela inserção de um vértice.

5.2.4 Inserção de elemento 4-conexo

Dado um ciclo par delimitando a região sem malha, procura-se formar um elemento 4-conexo com apenas uma diagonal par, que seja convexo e que atenda o critério de qualidade (Fig. 10a). Se o quadrilátero 4-conexo for convexo, mas não atender ao critério de qualidade, ele será criado desrespeitando o critério de qualidade. No entanto, se o quadrilátero 4-conexo não for convexo (Fig. 10b), um dos quadriláteros especiais deverá ser usado. Se nenhum quadrilátero 4-conexo for encontrado, tenta-se inserir um elementos 3-conexo. Se não for possível inserir um elemento desse tipo, tenta-se inserir um elemento 2-conexo. Uma vez inserido um desses elementos, volta-se a tentar a inserção de elementos 4-conexos com diagonal par.

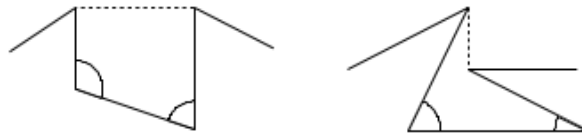


Figura 10: Quadriláteros 4-conexos.

5.2.5 Inserção de elemento 3-conexo

Sempre que um elemento 4-conexo com uma diagonal par não puder ser inserido, o algoritmo tenta inserir um elementos 3-conexo em uma orelha do polígono (Fig. 11a). Todo polígono simples possui pelo menos duas orelhas segundo [Meisters \(1975\)](#). Com os vértices anterior e posterior de um vértice cujas arestas adjacentes formam um ângulo convexo, cria-se um novo vértice localizado na metade da distância entre esses dois vértices (Fig. 11b). O vértice v_m será deslocado de forma perpendicular a diagonal ímpar imaginária sobre a qual foi criado (Fig. 11c). Esse deslocamento será o menor dos seguintes valores de referência: o menor segmento na malha, a menor distância de v_m a um vértice não vizinho, a distância entre v_m e o vértice que contém o ângulo convexo e o deslocamento máximo permitido dentro da região válida do quadrilátero (Fig. 11d).

5.2.6 Inserção de elemento 2-conexo

Os quadriláteros 2-conexos são adicionados apenas em último caso. Seleciona-se a maior aresta presente em um ciclo (Fig. 12a), criam-se dois novos vértices a uma distância fixa dos extremos dessa aresta igual a um terço de seu comprimento (Fig. 12b), move-se cada um desses vértices perpendicularmente a esse segmento (Fig. 12c) e obtém-se um trapézio (Fig. 12d). O deslocamento dos dois vértices será o menor dos seguintes valores de referência: o menor segmento na malha, a menor distância para um vértice não vizinho e o deslocamento máximo permitido dentro da região válida do quadrilátero. É importante perceber que o quadrilátero

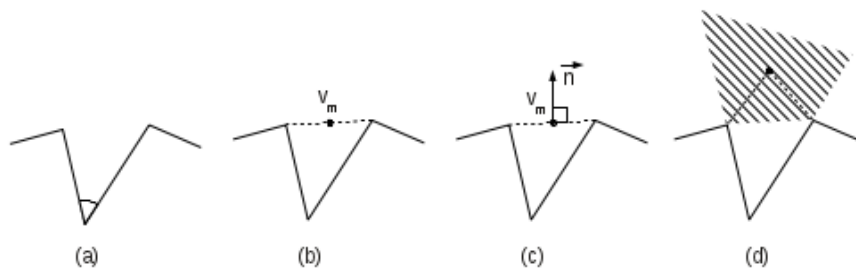


Figura 11: Inserção de elemento 3-conexo: a) Vértice com ângulo convexo. b) Vértice médio v_m , c) Segmento perpendicular a diagonal imaginária e d) Resultado final.

2-conexo adiciona três segmentos de tamanho menor que o segmento original sobre o qual foi construído.

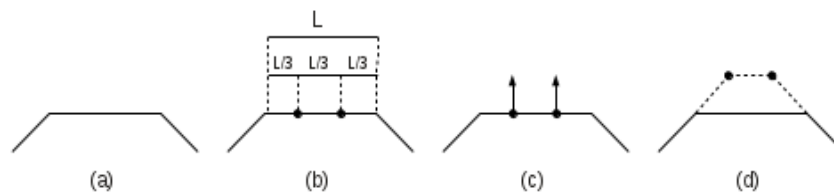


Figura 12: Inserção de elemento 2-conexo: a) A maior aresta. b) Dois novos vértices a uma distância fixa dos extremos, c) Projeção dos vértices de forma perpendicular a aresta, e d) Resultado final.

5.2.7 Quadriláteros especiais

A sequência de inserção de elementos 4-conexos com apenas uma diagonal par, seguida da inserção de elementos 3-conexos e depois, de elementos 2-conexos é repetida várias vezes, até que nenhum elemento quadrilateral com essas características possa mais ser inserido. Se, neste momento, ainda existirem regiões sem malha circundada por ciclos pares maiores do que seis, serão inseridos elementos 4-conexos com duas diagonais pares ou duas diagonais ímpares para finalizar a geração da malha (Fig. 13). No caso de duas diagonais pares, e se o quadrilátero for convexo, o quadrilátero será apenas adicionado à malha.

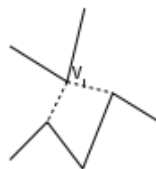


Figura 13: Quadrilátero 4-conexo. As diagonais que se ligam ao vértice v_l podem ser ímpares ou pares.

No caso de duas diagonais pares, e se o quadrilátero for côncavo, os quadriláteros de Varignon (Subseção 5.2.8) ou Boomerang (Subseção 5.2.9) serão adicionados à malha. No caso de duas diagonais ímpares, o quadrilátero 4-conexo degenerado ou hexágono caleidoscópico será adicionado à malha (Subseção 5.2.10).

5.2.8 Inserção de elemento Varignon

O elemento de Varignon (Fig. 14) foi obtido através de uma modificação no quadrilátero de Varignon e adiciona quatro vértices de Steiner. O elemento de Varignon consiste em adicionar um quadrilátero internamente à geometria, gerando cinco quadriláteros convexos. O seu objetivo é quadrilaterizar convexamente elementos 4-conexos formados por diagonais pares e que possuem um ângulo reto.



Figura 14: Elemento de Varignon.

Na Figura 15a, calcula-se o baricentro B dos quatro vértices a, d, b, c , e criam-se vértices a', d', b', c' na metade dos segmentos que ligam o baricentro B aos vértices externos a, d, b, c . Ou seja, é como se os segmentos do polígono fossem reduzidos pela metade, mantendo-se os ângulos e a direção dos segmentos (Fig. 15b). Uma vez que se obtenha este novo quadrilátero interno, adicionam-se os lados $(c, c'), (a, a'), (d, d')$ e (b, b') que são de fato transversais de um trapézios (Fig. 15c). Desloca-se, então, o vértice d' para a metade do segmento (d, d') , completando-se assim a quadrilaterização convexa (Fig. 15d).

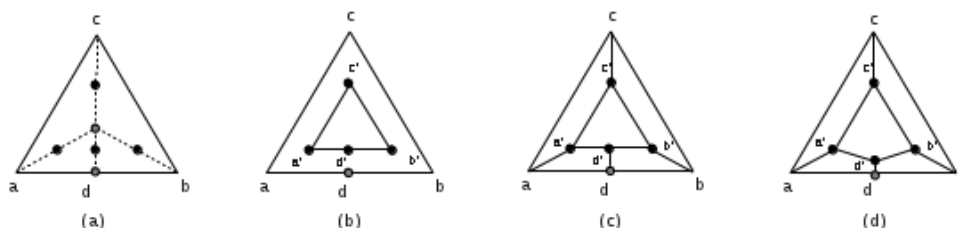


Figura 15: Construção do elemento de Varignon.

5.2.9 Inserção de elemento Boomerang

O elemento boomerang (Fig. 16) introduz quatro pontos de Steiner em um quadrilátero côncavo com o objetivo de quadrilaterizá-lo convexamente.



Figura 16: Exemplo de elemento boomerang.

Primeiramente, constrói-se um triângulo interno ao domínio que depois é transformado em um quadrilátero convexo. Assume-se um quadrilátero côncavo qualquer tal que $Q = \langle a, b, c, d \rangle$. Calcula-se o ponto médio do segmento (a, c) (Fig. 17a), em que c é o vértice que contém o ângulo côncavo e a é o vértice oposto. Em seguida, calculam-se os pontos médios

dos segmentos (a, pm) e (pm, c) , obtendo-se assim os dois primeiros vértices do que será o quadrilátero interno a' e c' . Define-se lado imaginário como um lado que remove o vértice côncavo de um quadrilátero côncavo, transformando-o em um elemento convexo. Dispara-se, então, um raio na direção do lado (a', c') até cruzar o lado imaginário (b, d) , que triangulariza o quadrilátero côncavo, no vértice i (Fig. 17b).

A Figura 17c exibe a formação do elemento triangular interno, usando como proporção a distância entre os lados (a', c') e (a, i) . O lado (b', d') não é criado, pois no seu lugar, criam-se os lados (b', c') e (c', d') , que serão os lados do quadrilátero interno. O vértice c' pertence ao lado (b', d') , e não viola a proporção entre os triângulos. Para terminar o cálculo do quadrilátero interno, basta calcular o vértice c'' como a distância média entre c' e c (Fig. 17e). O vértice c' será, então, reposicionado na localização de c'' e serão adicionados os lados dos quadriláteros vizinhos (a, a') , (b, b') , (c, c') e (d, d') (Fig. 17f).

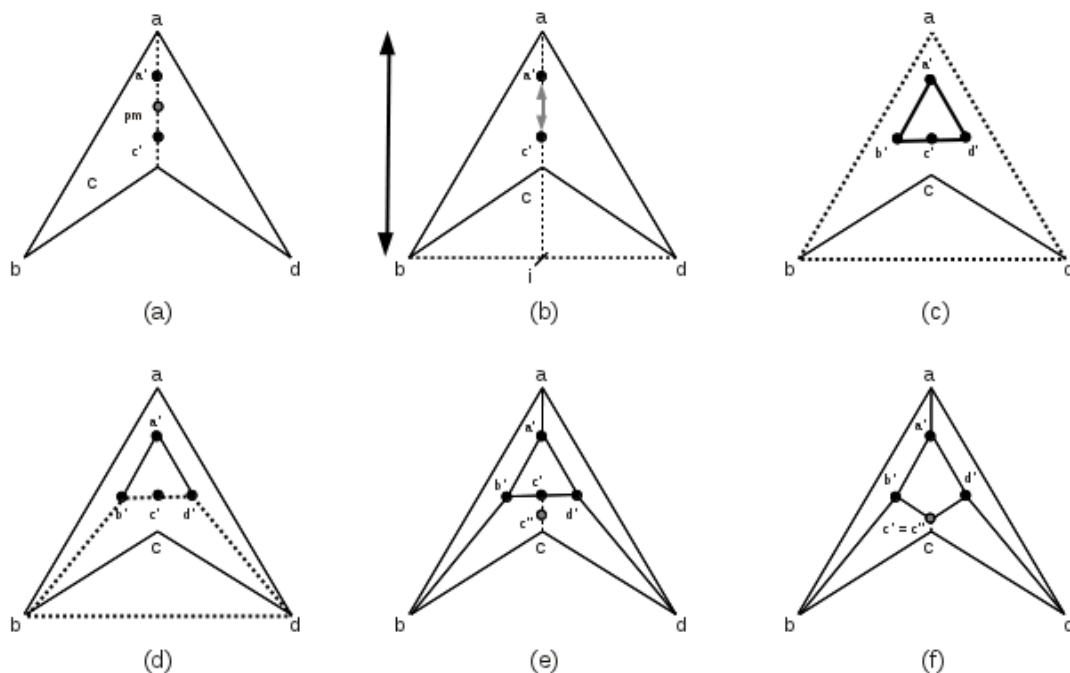


Figura 17: Construção do elemento boomerang.

5.2.10 Inserção de elemento 4-conexo degenerado (hexágono caleidoscópico)

O hexágono caleidoscópico recebe este nome devido a sua capacidade de deformar-se de acordo com o polígono. O seu objetivo é quadrilateralizar convexamente elementos 4-conexos degenerados formados por diagonais ímpares, sejam eles côncavos ou convexos. O hexágono caleidoscópico adiciona 4 vértices novos ao polígono e quatro quadriláteros convexos, corrigindo o quadrilátero 4-conexo degenerado. A Figura 18 exibe um exemplo de quadrilátero 4-conexo degenerado corrigido.

Para construção do hexágono, identifica-se primeiro um vértice na orelha do polígono que pode formar um quadrilátero 4-conexo degenerado (Fig. 19a). Em seguida, são adicionados dois vértices na metade das diagonais ímpares para assegurar a paridade dos ciclos (Fig. 19b).

Inserem-se os dois últimos vértices, o primeiro vértice localiza-se na metade da diagonal imaginária ímpar que constituiria o quadrilátero 4-conexo degenerado e que removeria um tri-



Figura 18: Exemplo de um elemento 4-conexo degenerado ou hexágono caleidoscópico.

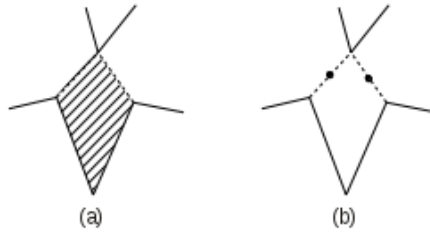


Figura 19: Construção de hexágono caleidoscópico: a) Identificação de quadrilátero 4-conexo degenerado e b) Com a adição de dois vértices cria-se o hexágono.

ângulo do polígono ou sua orelha (Fig. 20a). O segundo vértice é o baricentro do triângulo formado pelos três novos vértices (Fig. 20b). Na Figura 20c, os vértices anteriores são unidos ao baricentro, e então, deslocados em direção à metade da distância deles ao baricentro, obedecendo-se a região válida para construção de quadriláteros n-conexos. Obtém-se desse modo o hexágono caleidoscópico (Fig. 20d).

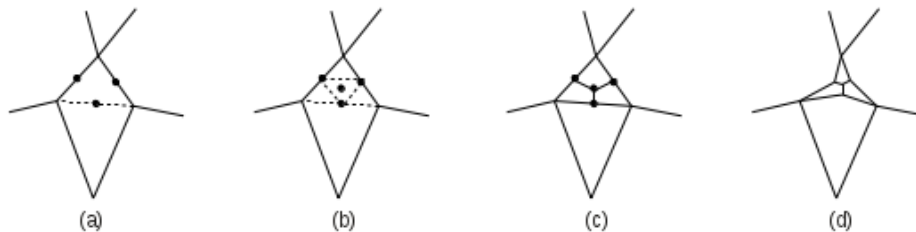


Figura 20: Quadrilaterização convexa do elemento 4-conexo degenerado.

6 ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção, é analisada a malha quadrilateral obtida pela aplicação da técnica de quadrilaterização incremental. Dois exemplos são apresentados: o de uma lâmina de uma serra circular, e o do Lago Superior na América do Norte. Para cada um dos exemplos, o modelo é descrito em detalhes para permitir que seja reproduzido ou aplicadas outras técnicas de geração de malhas quadrilaterais; algumas propriedades interessantes do modelo são apresentadas; e, por fim, a malha e sua qualidade são discutidas.

As malhas geradas são analisadas à luz do coeficiente de topologia, do coeficiente de geometria e da frequência angular. Essas métricas são apresentadas a seguir.

6.1 Métricas de qualidade da malha

A malha Cartesiana é usada como referência para a construção de um coeficiente topológico, de um coeficiente geométrico e de um histograma de frequência angular, já que todos os seus

elementos são regulares, ortogonais e possuem uma boa qualidade.

6.1.1 Coeficiente topológico

A vizinhança de um elemento quadrilateral é usada como medida de qualidade da malha tanto na fronteira como internamente à malha. Essa vizinhança é representada pelo uso do coeficiente topológico, c_t , calculado pela expressão:

$$c_t = 1 - \sum_{i=0}^n \frac{f(v_i)}{n}, \quad (1)$$

onde n é a quantidade de vértices na malha e v_i é um vértice qualquer da malha. A função $f(v_i)$ é definida como:

$$f(v_i) = \begin{cases} u - 2 & , \text{ se } v_i \in C_f \\ u - 4 & , \text{ se } v_i \notin C_f, \end{cases} \quad (2)$$

em que u é a quantidade de quadriláteros que compartilham o vértice v_i e C_f é o ciclo mais externo da malha, ou o ciclo da fronteira. Quando c_t for próximo de um, a malha é próxima de uma malha Cartesiana.

6.1.2 Coeficiente geométrico

O coeficiente geométrico, c_g , é a média das razões entre a área de um quadrilátero e a área de um quadrado cujo lado é igual ao maior lado do quadrilátero. Assim:

$$c_g = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \frac{a(e_j)}{A(e_j)}, \quad (3)$$

onde que m é a quantidade de quadriláteros na malha, e_j é um quadrilátero qualquer da malha. A área $a(e_j)$ do quadrilátero e_j é calculada pela fórmula de Brahmagupta (Weisstein, 2011):

$$a(e_j) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \theta}, \quad (4)$$

em que s é o semiperímetro do quadrilátero; a , b , c e d são os comprimentos de seus lados; e θ é a média de dois ângulos opostos quaisquer do quadrilátero. A área $A(e_j)$ é calculada como:

$$A(e_j) = (\max(a, b, c, d))^2, \quad (5)$$

Se o coeficiente geométrico calculado pela Equação 3 estiver próximo de um, a malha é considerada próxima de uma malha Cartesiana.

6.1.3 Histograma de frequência angular

Além dos coeficientes topológico e geométrico, o histograma que apresenta a frequência dos ângulos na malha também pode ser usado como indicador da qualidade da malha. O valor ideal de 90° está situado no meio do gráfico de barras. O gráfico é dividido em 19 intervalos, o primeiro intervalo é para ângulos entre 0° e 5° , e os 17 intervalos seguintes variam de 10° , sendo que o último é definido para ângulos entre 175° e 180° . Uma malha que apresenta uma frequência alta de ângulos retos possui uma barra central no gráfico e é considerada uma boa malha, já que a malha Cartesiana se compõe exclusivamente de ângulos retos.

6.2 Lâmina de Serra Circular

O modelo da Lâmina de Serra Circular sobre o qual a técnica de quadrilaterização incremental está ilustrado na Figura 21. A figura possui 468 vértices e segmentos com pequenas cavidades dispostas em um círculo regular; a razão entre o raio menor (r) e o raio maior (R) é de $13/15$; cada cavidade representa uma variação de 2° círculo e cada dente da lâmina representa uma variação de 8° no círculo.

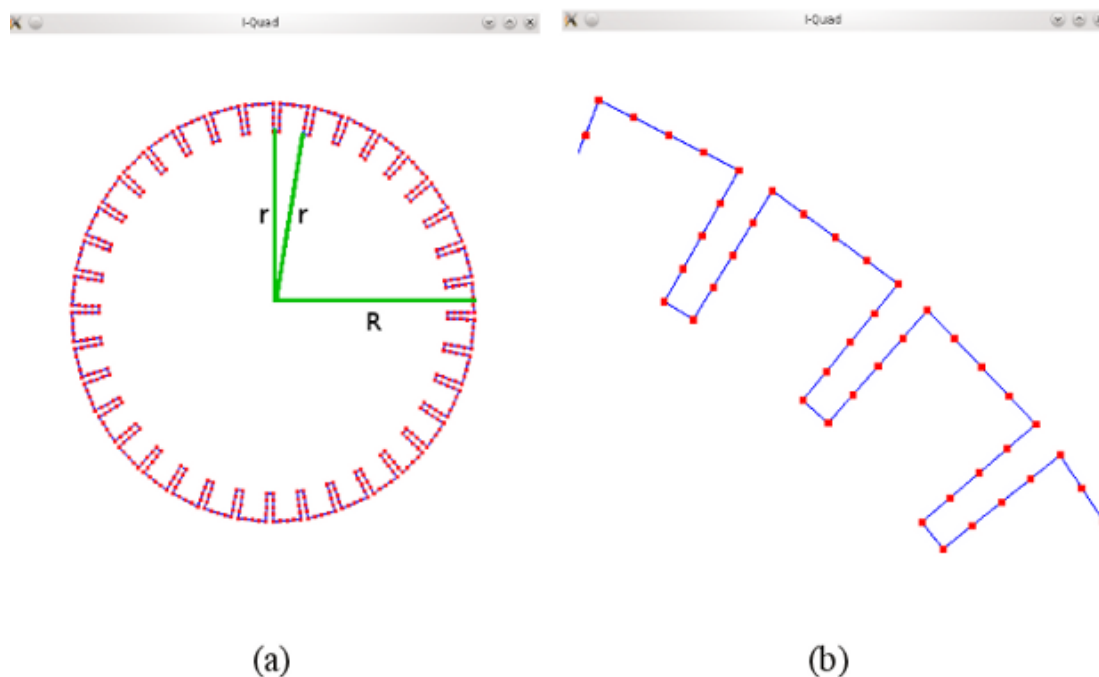


Figura 21: Modelo da lâmina de serra circular: (a) raio menor varia em 10° ; (b) detalhe do modelo.

Este modelo é usado para apresentar o algoritmo atuando sobre curvas e cavidades, assim como ângulos côncavos múltiplos de 90° , e, assim demonstrar sua flexibilidade em lidar com domínios regulares ou não.

Na Tabela 1, é possível observar que a malha da Figura 22a, resultante da quadrilaterização incremental sobre o polígono original, possui 1.441 quadriláteros convexos, e coeficientes topológico e geométrico que se aproximam de 0,82 e 0,74 respectivamente. Isso indica que a qualidade dos elementos da malha é boa, mesmo que existam alguns elementos finos ou quadriláteros especiais principalmente na região mais interna da malha, onde as linhas imaginárias do avanço de fronteira se encontram. Na Figura 22b, é possível perceber que o pico da distribuição dos ângulos está no intervalo central do gráfico que é entre 85° e 95° , o que pode indicar elementos de uma qualidade ainda melhor do que a sugerida pelos coeficientes.

Tabela 1: Coeficiente topológico e geométrico para a malha na Figura 22.

Malha	Lâmina de Serra Circular
Quantidade de elementos	1.441
Coeficiente topológico	0,819809
Coeficiente geométrico	0,736323

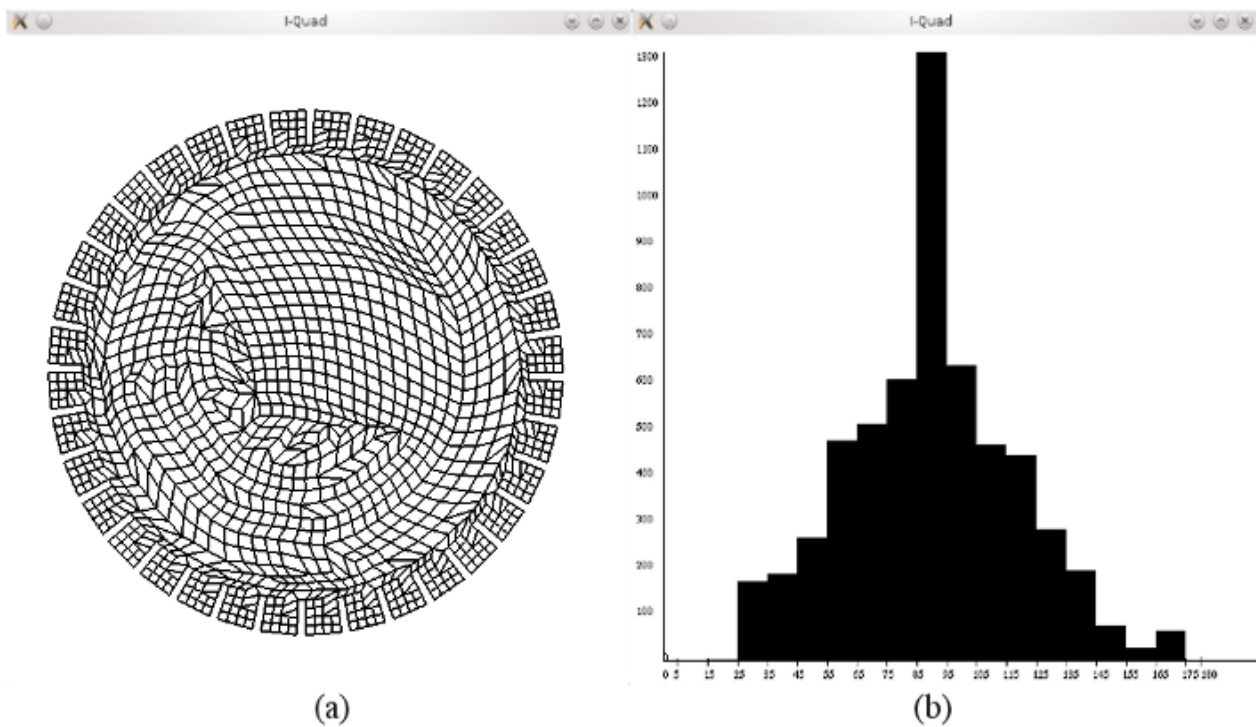


Figura 22: Resultados: (a) Malha da lâmina de serra circular e (b) Histograma com frequência angular.

6.3 Lake Superior

Lake Superior (Fig. 22) é um exemplo tradicional usado em técnicas de modelagem 2D de quadrilaterização e triangulação e busca representar um caso real de geografia do maior lago situado na América do Norte. Neste caso, o modelo foi simplificado pela remoção de vértices muito próximos entre si e de ilhas internas existentes no lago, usa-se de uma representação do lago com 161 vértices e segmentos (Bukardt, 2002), já que a técnica de quadrilaterização incremental ainda não lida com buracos internos à geometria.

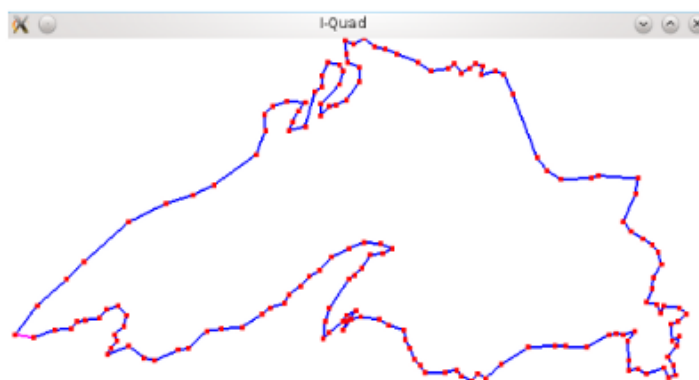


Figura 23: Simplificação do modelo do Lake Superior.

Este modelo é usado para testar o algoritmo em um domínio sem nenhuma simetria e bastante irregular, apresentando ângulos côncavos variados. A malha de quadriláteros do Lake Superior, gerada pelo algoritmo de quadrilaterização incremental, está mostrada na Figura 25.

Na Tabela 2, é possível observar que a malha final possui 651 quadriláteros convexos, e

coeficientes topológico e geométrico que se aproximam de 0,62 e 0,52 respectivamente. Isso indica que existe um grau razoável de qualidade entre os elementos da malha. Na Figura 24 é possível perceber dois picos de distribuição dos ângulos que não estão no intervalo central, mas estão próximos do ângulo reto, o que pode indicar uma variação na qualidade dos elementos entre elementos ruins e muito bons, porém todos convexos e com uma qualidade próxima da ideal.

Tabela 2: Coeficiente topológico e geométrico para a malha na Figura 25.

Malha	Lake Superior
Quantidade de elementos	651
Coeficiente topológico	0,616644
Coeficiente geométrico	0,517478

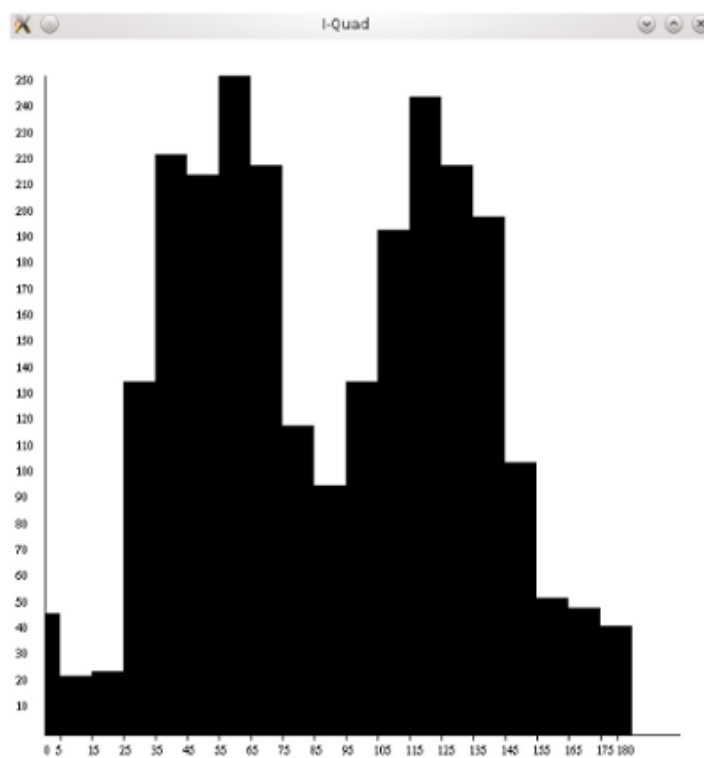


Figura 24: Histograma com frequência angular da malha na Figura 25.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foi apresentado um novo algoritmo de quadrilaterização incremental que gera malhas em que todos os elementos são quadriláteros convexos. As malhas geradas apresentam boa qualidade. No entanto, vale salientar que, em subregiões muito pontiagudas, a qualidade dos elementos fica comprometida por essa restrição. Isso também ocorre em malhas de elementos triangulares. O conceito de quadrilátero n -conexo também foi introduzido neste trabalho, e suas propriedades foram discutidas. É importante notar que esse conceito pode ser aplicado a outros algoritmos existentes.

A introdução de quadriláteros convexos de alta qualidade pode não ser sempre possível devido a restrições do próprio domínio. O uso exagerado de quadriláteros especiais pode ocasionar

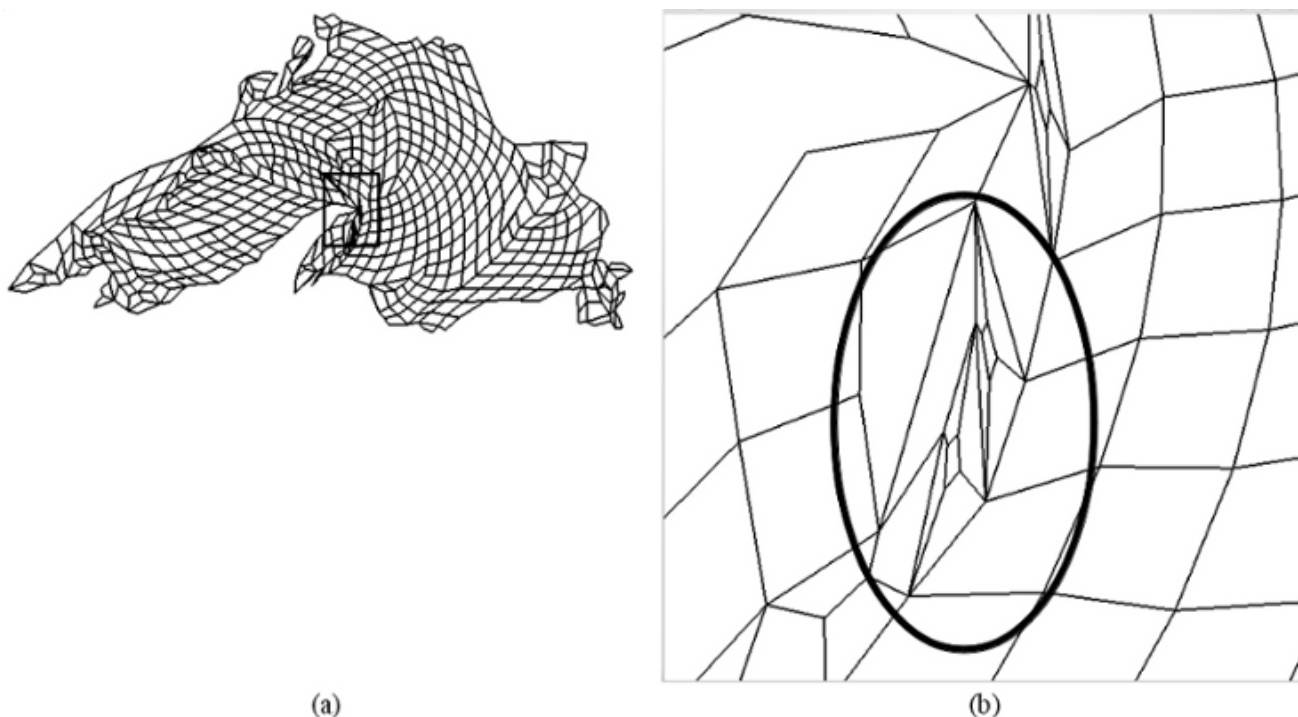


Figura 25: Malha resultante: (a) Visão geral da malha com detalhe assinalado e (b) Detalhe central inferior exibindo quadriláteros especiais.

uma redução da qualidade final da malha. Portanto, é necessário estudar outras alternativas e observar os efeitos que elas ocasionam sobre a malha resultante. Um caminho natural seria sempre tentar inserir o melhor quadrilátero n -conexo existente no momento, ou então tentar identificar outros critérios de qualidade na malha Cartesiana. O algoritmo precisa ser modificado para a existência de buracos, nuvens de pontos e linhas poligonais em um domínio qualquer.

REFERÊNCIAS

- Atalay F. e Ramaswami S. Quadrilateral meshes with bounded minimum angle. In *17th Int. Meshing Roundtable*, páginas 73–91. 2008.
- Barequet G. e Har-Peled S. Efficiently approximating the minimum-volume bounding box of a point set in three dimensions. *J. Algorithms*, 38:91–109, 2001.
- Blacker T.D. e Stephenson M.B. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(4):811–847, 1991.
- Blum H. A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, páginas 362–380. MIT Press, Cambridge, 1967.
- Bose P. e Toussaint G. No quadrangulation is extremely odd. In *Proc. Of the International Symposium on Algorithms and Computation*. 1995.
- Bremner D., Hurtado F., Ramaswami S., e Sacristan V. Small convex quadrangulations of point sets. In *Proceedings of the 12th International Symposium on Algorithms and Computation*, páginas 623–635. 2001.
- Burkardt J. 303 points defining the shape of lake superior. <http://orion.math.iastate.edu/burkardt/data/xy/xy.html>, 2002. [Online, 24 de agosto de 2011].

- Corrêa L.P.R. e Ferreira C.E. Teorema da galeria de arte e triangularização de polígonos. Monograph, USP - Universidade de São Paulo, Brazil, 2009.
- Everett H., Lenhart W., Overmars M., Shermer T., e Urrutia J. Strictly convex quadrilateralizations of polygons. In *Proceedings of The Fourth Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 77–82. 1992.
- Joe B. Quadrilateral mesh generation in polygonal regions. *Computer-Aided Design*, 27(3):209–222, 1995.
- Kahn J., Klawe M., e Kleitman D. Traditional galleries require fewer watchmen. *SIAM Journal Alg. Disc. Math.*, 4:194–206, 1983.
- Lai M.J. Scattered data interpolation and approximation using bivariate c_1 piecewise cubic polynomials. *Computer Aided Geometric Design*, 13(1):81– 88, 1996.
- Lai M.J. e Schumaker L.L. Scattered data interpolation using c_2 supersplines of degree six. *SIAM J.*, 34(3):905–921, 1997.
- Lai Y.K., Kobbelt L., e Hu S.M. An incremental approach to feature aligned quad dominant remeshing. In *Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modeling, SPM '08*, páginas 137–145. ACM, 2008.
- Liang X., Ebeida M.S., e Zhang Y. Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation proceedings. In *18th International Meshing Roundtable*, páginas 45–63. 2009.
- Lizier M.A.S., Siqueira M.F., Daniels J., e Silva C.T. Template-based remeshing for image decomposition. In *SIBGRAPI*. 2010.
- Lubiw A. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. In *Proc. Of the 1st ACM Symposium on Computational Geometry*, páginas 97–106. 1985.
- Meisters G. Polygons have ears. *The American Mathematical Monthly*, 82(6):648–651, 1975.
- O'Rourke J.; Supowit K. Some np-hard polygon decomposition problems. *Information Theory, IEEE Transactions*, 29(2):181–190, 1983.
- Quadros W.R., Ramaswami K., Prinz F.B., e Gurumoorthy B. Laytracks: a new approach to automated geometry adaptive quadrilateral mesh generation using medial axis transform. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:209–237, 2004.
- Ramaswami S., Ramos P., e Toussaint G. Converting triangulations to quadrangulations. *PHYS*, 49:413, 1983.
- Randrianarivony M. *Geometric Processing of CAD Data and Meshes as Input of Integral Equation Solvers*. Ph.d. thesis, Technical University of Chemnitz, Germany, 2006.
- Randrianarivony M. Quadrilateral decomposition by two-ear property resulting in cad segmentation. *Word Academy Of Science, Engineering and Technology*, 44, 2008.
- Weisstein E.W. "brahmagupta's formula". From MathWorld – A Wolfram Web Resource <http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasFormula.html>, 2011. [Online, 24 de agosto de 2011].
- Wolfenbarger P., Jung J., R. Dohrmann C., Witkowski W.R.; Panthaki M., e Gerstle W. A global minimization-based, automatic quadrilateral meshing algorithm. In *Proceedings, 7th International Meshing Roundtable*, páginas 87–103. 1998.
- Yamakawa S. e Shimada K. Quad-layer: Layered quadrilateral meshing of narrow two-dimensional domains by bubble packing and chordal axis transformation. *Journal of Mechanical Design*, 124(3):564–573, 2002.
- Zadravec M., Schiftner A., e Wallner J. Designing quad-dominant meshes with planar faces. *Computer Graphics Forum*, 29(5):1671–1679, 2010. Proc. Symp. Geometry Processing.